

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
M-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

MMA-P-R0-100-2405

DATA: 15 maja 2024 r.

GODZINA ROZPOCZĘCIA: 9:00

CZAS TRWANIA: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Upewnienien zdującego do:

☐ dostosowania zasad ocenienien.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdz, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Zadanie 1. (0-2)

W chwili początkowej ($t = 0$) filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa 80°C . Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa 20°C . Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = (T_p - T_z) \cdot k^{-t} + T_z \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie:

T – temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

t – czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,

T_p – temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

T_z – temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,

k – stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury 65°C .

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned} 65 &= (80 - 20) \cdot k^{-10} + 20 \\ 45 &= 60 \cdot k^{-10} \\ \frac{3}{4} &= k^{-10} \Rightarrow k^{-5} = \frac{\sqrt[5]{3}}{2} \Rightarrow k^{-15} = \frac{3\sqrt[5]{3}}{8} \\ T(15) &= (80 - 20) \cdot k^{-15} + 20 = 60 \cdot k^{-15} + 20 = \\ &= 60 \cdot \frac{3\sqrt[5]{3}}{8} + 20 = 59^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$



Zadanie 2. (0-2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2}$$

2.

0-1-2

Zapisz obliczenia.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)^2} = \left[\frac{4+4+4}{0^-} \right] = -\infty$$

Zadanie 3. (0–3)

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontrolę poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

3.

0–1–
2–3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

prawdopodobieństwo sukcesu 0,01

– 11 –

porażki 0,99

$$\binom{10}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,01 \cdot 0,99^9 =$$

$$0,99^{10} + 0,1 \cdot 0,99^9 = 0,99^9 (0,99 + 0,1) = 0,99^9 \cdot 1,09 \approx$$

$$\approx 0,9957 \approx 0,996$$



Zadanie 4. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt P , o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f .

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P .

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej. Zapisz obliczenia.

4.
0-1-
2-3

$$f(2) = \frac{8-6+2}{2} = 2$$

$$P = (2, 2)$$

$$\text{styczna } y = ax + b$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-3) \cdot x - 1(x^3-3x+2)}{x^2} = \frac{3x^3-3x-x^3+3x-2}{x^2} =$$

$$\frac{2x^3-2}{x^2}$$

$$a = f'(2) = \frac{2 \cdot 8 - 2}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}x + b \quad P(2, 2)$$

$$2 = \frac{7}{2} \cdot 2 + b$$

$$-5 = b$$

$$\text{Odp. } a = \frac{7}{2}$$

$$b = -5$$

5.

0-1-
2-3

Zadanie 5. (0-3)

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \frac{\log_4 (16 \cdot 5)}{\log_4 (4 \cdot 3)} = \frac{\log_4 16 + \log_4 5}{\log_4 4 + \log_4 3} =$$

$$\frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3} = \frac{2 + 5}{1 + b} = \frac{2a + 1}{a + ab} = \frac{2a + 1}{a(1+b)}$$

cnd



Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakiegokolwiek cyfry oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.

Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

6.

0–1–
2–3

P _ _ _ _

N _ _ _ _

$$4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \underbrace{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{nieparzyste}} = 3840$$

$$5 \cdot \binom{4}{2} \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{parzyste}} = 7200$$

Odp. 11040

Zadanie 7. (0-4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

7.

0-1-
2-3-4

Oblicz x, y oraz z . Zapisz obliczenia.

$$\begin{aligned}
 y^2 &= x \cdot z & y - x &= r \\
 x + y + z &= 105 & z - y &= 4r \\
 z &= 5y - 4x & \text{zatem} & z - y = 4(y - x) \\
 y^2 &= x(5y - 4x) & z - y &= 4y - 4x \\
 x + y + 5y - 4x &= 105 & z &= 5y - 4x \\
 6y - 3x &= 105 \quad | :3 \\
 2y - x &= 35 \\
 y^2 &= (2y - 35)(5y - 4(2y - 35)) \\
 y^2 &= (2y - 35)(5y - 8y + 140) \\
 y^2 &= (2y - 35)(140 - 3y) \\
 y^2 &= 280y - 6y^2 - 4900 + 105y \\
 7y^2 - 385y + 4900 &= 0 \quad | :7 \\
 y^2 - 55y + 700 &= 0 \\
 \Delta &= 3025 - 4 \cdot 700 = 225 & \sqrt{\Delta} &= 15 \\
 y_1 &= \frac{55 - 15}{2} = 20 & x_1 &= 5 & z_1 &= 80 \\
 y_2 &= 35 & x_2 &= 35 & z_2 &= 35 & \text{spadek ciąg rosnący}
 \end{aligned}$$



Zadanie 8. (0-4)

Dany jest trójkąt ABC , który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC .

8.

0-1-
2-3-4

Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

$b^2 = a^2 + c \cdot a$

z tw. sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = 2R$$

$$\sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin \alpha$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \sin 2\alpha$$

$$c = 2R \sin 3\alpha$$

$$b^2 = a^2 + ac$$

$$4R^2 \sin^2 2\alpha = 4R^2 \sin^2 \alpha + 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin 3\alpha \quad / : 4R^2$$

$$\sin^2 2\alpha = \sin^2 \alpha + \sin \alpha \sin 3\alpha$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) =$$

$$2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha =$$

$$2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha =$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$4\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x + \sin x \cdot (3\sin x - 4\sin^3 x)$$

$$4\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x + 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$$

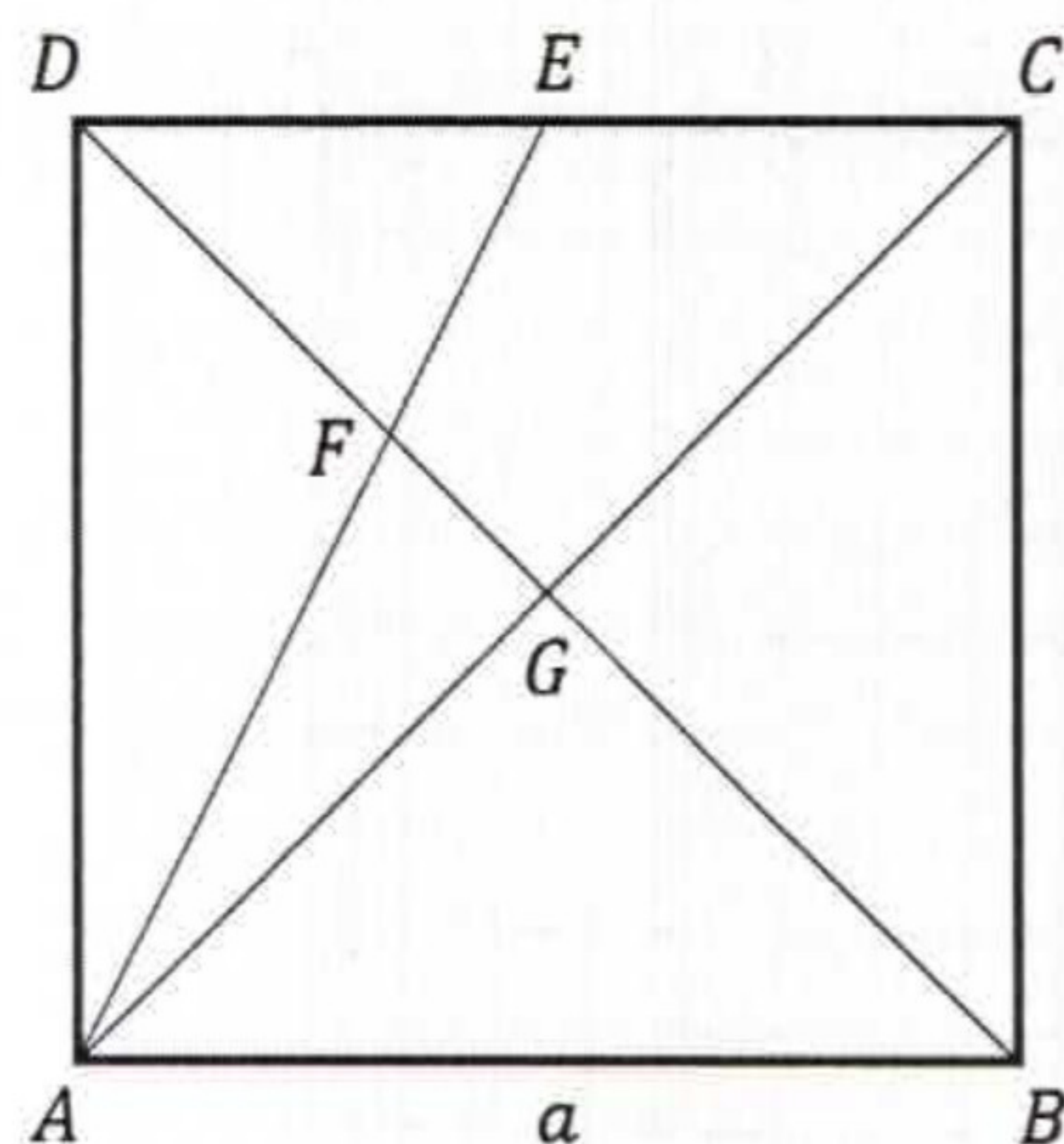
$$4\sin^2 x - 4\sin^4 x = 4\sin^2 x - 4\sin^4 x$$

$$0=0$$

o.m.d

Zadanie 9. (0–4)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a . Punkt E jest środkiem boku CD . Przekątna BD dzieli trójkąt ACE na dwie figury: AGF oraz $CEFG$ (zobacz rysunek).



Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.

9.
0-1-2-3-4

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$$

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{4}a^2$$

$$|DG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$|FG| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$|AG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^2}{2 \cdot 12} = \frac{a^2}{12}$$

$$P_{ACE} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{3}{12}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$


10.

0-1-

2-3-

4-5

Zadanie 10. (0-5)

Rozwiąż równanie

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

w zbiorze $[0, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

$$2\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 4\cos^2 x - 3$$

$$\sin 2x (2\cos 2x - 1) = 4\cos^2 x - 3$$

$$\sin 2x (2(2\cos^2 x - 1) - 1) = 4\cos^2 x - 3$$

$$\sin 2x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^2 x - 3$$

$$\sin 2x (4\cos^2 x - 3) - (4\cos^2 x - 3) = 0$$

$$(4\cos^2 x - 3)(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = 1$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$



Zadanie 11. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C . Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

11.

0-1-
2-3-
4-5

Oblicz współrzędne punktu S . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

$$|AC| = |AB| = a$$

$$A = (1, 2)$$

$$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{5}$$

$$a = 3\sqrt{5}$$

$$|AS|^2 = (3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 45 + 5 = 50$$

$$|AS| = 5\sqrt{2} = r$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$$

Punkt S

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 50 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 50$$

$$x^2 - 2x + 1 + (x+1-2)^2 = 50$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 50$$

$$2(x-1)^2 = 50$$

$$(x-1)^2 = 25$$

$$|x-1| = 5$$

$$\begin{matrix} x = -4 \\ y = -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x = 6 \\ y = 7 \end{matrix}$$



Odp. $S = (-4, -3)$ lub $S = (6, 7)$



12.

0-1-
2-3-
4-5-6

Zadanie 12. (0-6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (3m + 1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Zapisz obliczenia.

$$\Delta > 0$$

$$\Delta = 9m^2 + 6m + 1 - 8m^2 - 4m - 4 = m^2 + 2m - 3 = (m+3)(m-1)$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

$$x_1 + x_2 = 3m + 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2m^2 + m + 1$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2)^3 - (x_1 + x_2) \cdot 3x_1x_2 \end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2)^3 - (x_1 + x_2) \cdot 3x_1x_2 + 3x_1x_2(x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

$$(x_1 + x_2)^3 - (x_1 + x_2) \cdot 3x_1x_2 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$

$$(3m + 1)^3 - 9(2m^2 + m + 1) \leq 3m - 7$$

$$27m^3 + 3 \cdot 9m^2 + 3 \cdot 3m + 1 - 18m - 9m - 9 - 3m + 7 \leq 0$$

$$27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$$

$$9m^2(3m + 1) - (3m + 1) \leq 0$$

$$(3m + 1)(9m^2 - 1) \leq 0$$

$$(3m + 1)(3m - 1)(3m + 1) \leq 0$$

$$\text{Odp. } m \in (-\infty, -3)$$



Zadanie 13.2. (0-4)

Pole P powierzchni całkowitej graniastopu w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastopu jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}]$.

13.2.

0-1-
2-3-4

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastopów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

$$P'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} =$$

$$\frac{a^3\sqrt{3} - 13824\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 13824)}{a^2}$$

$$24^3 = 13824$$

P jest ciągła w dziedzinie $a \in (0, 8\sqrt{3}]$
 $P \searrow$ dla $a \in (0, 8\sqrt{3}]$

zatem

P najmniejsze dla $a = 8\sqrt{3}$

$$P = \frac{(8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 96\sqrt{3} + 1728$$



Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

13.1.

0–1–2

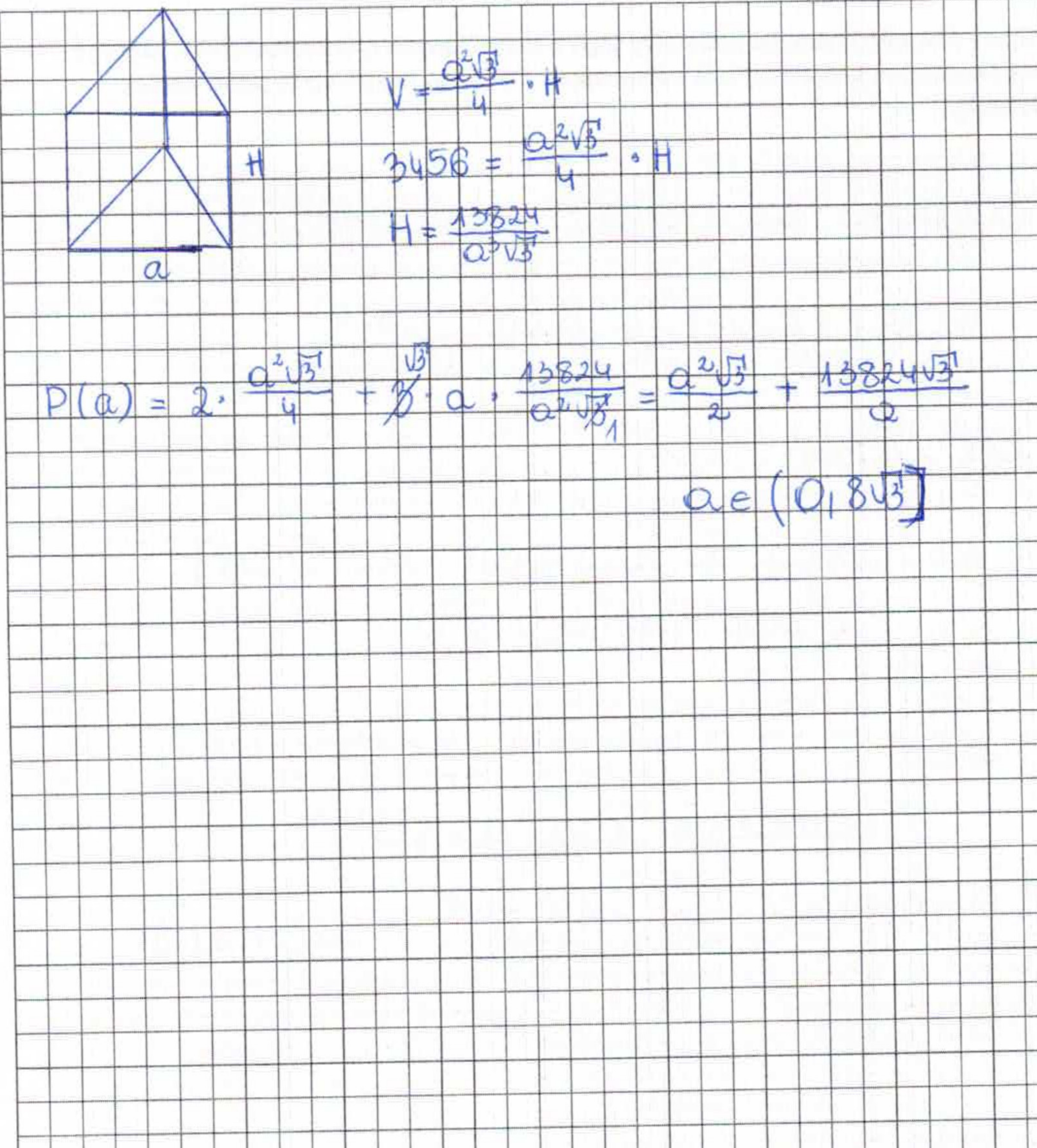


Diagram of a triangular prism with base side a and height H .

Volume formula: $V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$

Given volume: $3456 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$

Height calculation: $H = \frac{13824}{a^2 \sqrt{3}}$

Total surface area calculation: $P(a) = 2 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \frac{13824}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{13824 \sqrt{3}}{a}$

Domain: $a \in (0, 8\sqrt{3}]$