CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny ***Formuła 2015***

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-**100**-2405

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania zasad oceniania
☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

DATA: **15 maja 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Odległość punktu $A = (6, 2)$ od prostej o równaniu $5x - 12y + 1 = 0$ jest równa

A. $\frac{7}{13}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Zadanie 2. (0–1)

Równanie $|2x - 4| = 3x + 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych

A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 3. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |-(x + 2)^3 + 5|$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $\langle -2, +\infty)$ **B.** $\langle 0, +\infty)$ **C.** $\langle 3, +\infty)$ **D.** $\langle 5, +\infty)$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 + 3a + 2ax + ax^3}{3 + 4x + 5x^2 + 5x^3}$ jest równa 3. Wtedy

A. $a = 3$ **B.** $a = 9$ **C.** $a = 15$ **D.** $a = 21$

Zadanie 5. (0–2)

Wielomian $W(x) = 8x^3 + 14x^2 + 5x + 3$ jest iloczynem wielomianów $P(x) = 2x + 3$ oraz $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – wartości współczynników: a, b oraz c.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$

$Q(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$

$$\begin{array}{l} \quad 4x^2 + x + 1 \\ \hline 8x^3 + 14x^2 + 5x + 3 : 2x + 3 \\ -(8x^3 + 12x^2) \\ \hline \quad 2x^2 + 5x \\ \quad -(2x^2 + 3x) \\ \hline \qquad 2x + 3 \\ \qquad -(2x + 3) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

$Q(x) = 4x^2 + x + 1$

$ax^2 + bx + c$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

Z: $\log_5 4 = a \qquad \log_4 3 = b$

T: $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$

D: $\log_{12} 80 = \frac{\log_5 80}{\log_5 12} = \frac{\log_5(5\cdot 16)}{\log_5(3\cdot 4)} = \frac{\log_5 5 + \log_5 16}{\log_5 3 + \log_5 4} =$

$= \frac{1+\log 4^2}{\frac{\log_4 3}{\log_4 5}+a} = \frac{1+2\log_5 4}{\frac{b}{\frac{1}{\log_5 4}}+a} = \frac{1+2a}{\frac{b}{\frac{1}{a}}+a} =$

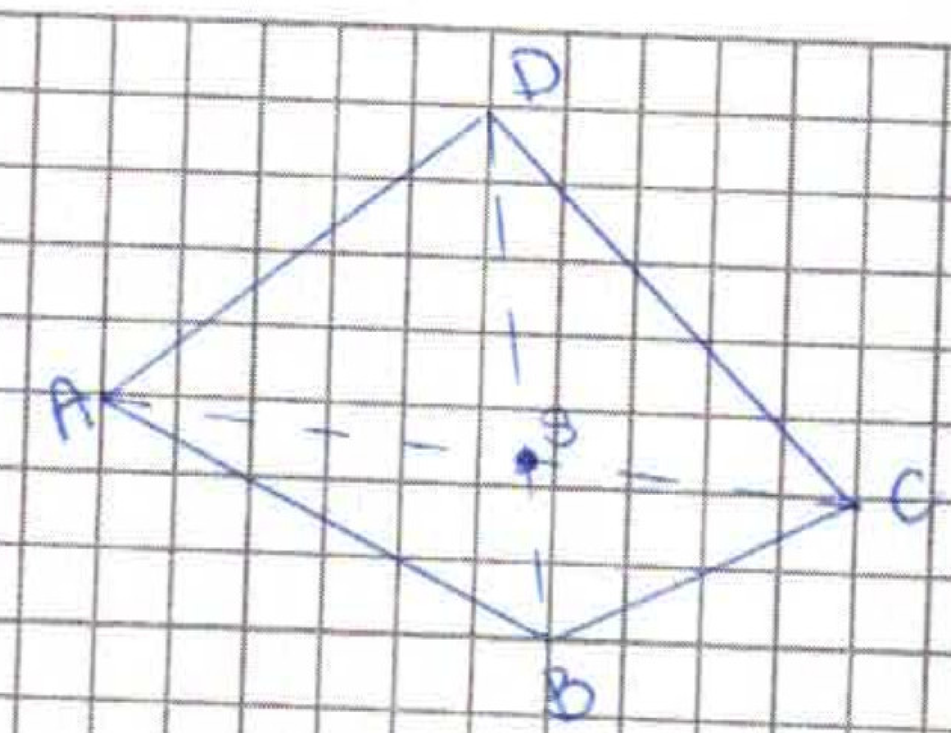
$\frac{1+2a}{ab+a} = \frac{1+2a}{a(1+b)}$ cnd

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC oraz BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S.

Wykaż, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

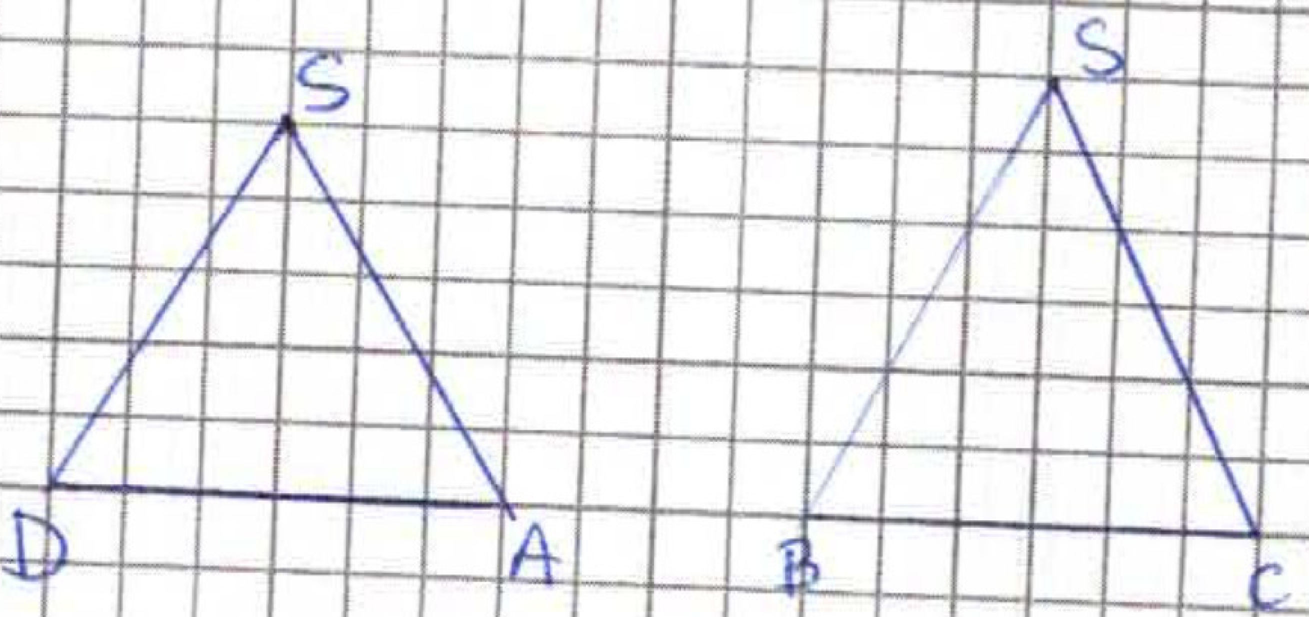


Z: $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$

T: Na ABCD można opisać okrąg

$\Updownarrow$

$|\sphericalangle BAB| + |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$



$\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|} \Rightarrow AD \parallel BC$

z tw Talesa

Zatem $\left.\begin{array}{l} |\sphericalangle ADS| = |\sphericalangle SBC| \\ |\sphericalangle DAS| = |\sphericalangle SCB| \end{array}\right\} T$

Analogicznie $AB \parallel CD$

zatem $\left.\begin{array}{l} |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle SCD| \\ |\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle SDC| \end{array}\right\}$ II

$$|\sphericalangle ADS| + |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle DAS| + |\sphericalangle SCB| +$$
$$+ |\sphericalangle BAS| + |\sphericalangle SCD| + |\sphericalangle ABS| + |SDC| = 360^\circ$$

$$2|\sphericalangle DAS| + 2|\sphericalangle BAS| + 2|\sphericalangle SCB| + 2|\sphericalangle SCD| = 360^\circ$$

$$\underbrace{|\sphericalangle DAS| + |\sphericalangle BAS|} + |\sphericalangle SCB| + |SCD| = 180^\circ$$

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ$$

cnd

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 8. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste.
Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb.

dokładnie 3 cyfry nieparzyste i 2 parzyste
=> liczba pięciocyfrowa

I nieparzysta

NP _ _ _ _

$5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$

↓

I nieparzysta $5 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 =$

$= 7200$

II parzysta

P _ _ _ _

$4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$

↓

parzysta (bez 0) $4 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 =$

$= 3840$

Odp. $3840 + 7200 = 11040$

Zadanie 9. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. Punkt P, o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P.

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej.

$f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x}$ $P(2, f(2))$

$f(2) = \frac{8-6+2}{2} = 2$ $P(2, 2)$ – punkt styczności $x_0 = 2$

$f'(x) = \frac{(3x^2-3)\cdot x - (x^3-3x+2)\cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3-3x^2-x^3+3x+2}{x^2} =$

$= \frac{2x^3-3x^2+3x+2}{x^2}$

$y = ax+b$ – styczna $\Rightarrow a = f'(2)$

$f'(2) = \frac{16-12+6+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$y = a(x-x_0)+f(x_0) = 3(x-2)+2 = 3x-6+2 =$

$= 3x-4$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–3)

Spośród wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, losujemy jedną. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która ma następującą własność: kolejne cyfry tej liczby (licząc od lewej strony) tworzą – w podanej kolejności – sześciowyrazowy ciąg malejący.

$\overline{\overline{\Omega}} = 8^6$

Największe: 876543
Najmniejsze: 654321

Liczby zaczynające się na 8:

876543
876542
876541
III możliwości

876521
876531
876532
III możliwości

876432
876431
876421
III możliwości

875432
875431
875421
875321
IV możliwości

865432
865431
865321
865321
865421
V możliwości

18 możliwości

liczby zaczynające się na 7:

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 7\,6\,5\,4\,3\,2 \\ 3\,1 \end{array}\right\} \text{2 możliwości} \\ 7\,6\,4\,3\,2\,1 - \text{1 możliwość} \\ 7\,5\,4\,3\,2\,1 - \text{1 możliwość} \end{array}\right\} \text{4 możliwości}$

liczby zaczynające się na 6:

$6\,5\,4\,3\,2\,1$ – 1 możliwość

Łącznie $18+4+1 = 23$ ← takich liczb

$P(A) = \frac{23}{8^6}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 11. (0–4)

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x, y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Oblicz x, y oraz z.

$x + y + z = 105$

x, y, z – ciąg geometryczny rosnący

a_n – ciąg arytmetyczny

$x = a_1 = x$

$y = a_2 = x + r$

$z = a_6 = x + 5r$

$y = x \cdot q$

$z = x \cdot q^2$

$x + xq + xq^2 = 105$

$x(1 + q + q^2) = 105$

$y = y$

$xq = x + r$

$xq - x = r$

$x(q - 1) = r$

$x = \frac{r}{q-1}$

$z = z$

$xq^2 = x + 5r$

$xq^2 - x = 5r$

$x(q^2 - 1) = 5r$

$x = \frac{5r}{q^2-1}$

$\frac{r}{q-1} = \frac{5r}{q^2-1}$

$\frac{r}{q-1} = \frac{5r}{(q-1)(q+1)} \quad / \cdot \frac{r}{q-1}$

$1 = \frac{5}{q+1}$

$q + 1 = 5$

$q = 4$

$x(1+q+q^2)=105$

$x(1+4+16)=105$

$x \cdot 21 = 105 \quad /:21$

$x=5$

$y = x \cdot q = 5 \cdot 4 = 20$

$z = x \cdot q^2 = 5 \cdot 4^2 = 80$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=20 \\ z=80 \end{cases}$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	11.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

w zbiorze $\langle 0, 2\pi)$.

$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin x - \cos x$

$2\sin x\cos x + 1 - 2\sin x^2 x - \sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x\cos x + \cos x - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) - \sin x(2\sin x + 1) = 0$

$(2\sin x + 1)(\cos x - \sin x) = 0$

$2\sin x + 1 = 0 \quad \vee \quad \cos x - \sin x = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = \sin x$

$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$,

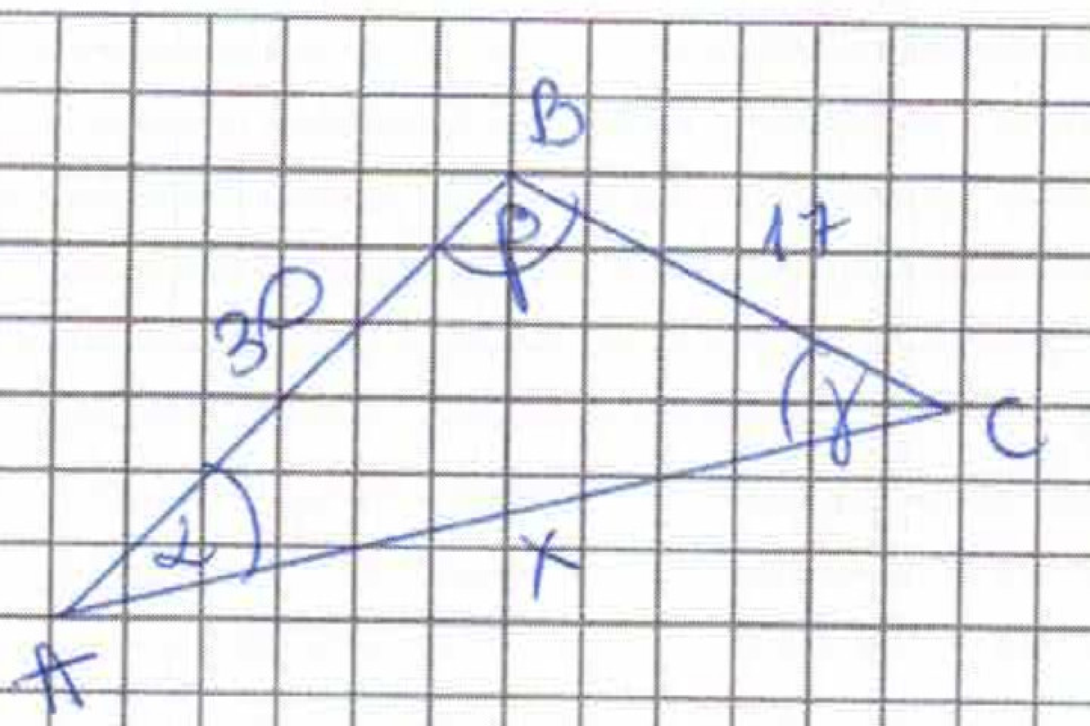
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

dla $x \in <0, 2k\pi$

$x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$

Zadanie 13. (0–4)

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 17. Najdłuższym bokiem tego trójkąta jest bok AC, a długości dwóch pozostałych boków są równe $|AB| = 30$ oraz $|BC| = 17$. Oblicz miarę kąta BAC oraz długość boku AC tego trójkąta.



$R = 17$

$\alpha = ?$

$x = ?$

z tw. sinusów $\frac{17}{\sin\alpha} = 2 \cdot 17$

$\sin\alpha = \frac{17}{2 \cdot 17} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \vee \alpha = 150^\circ$

$\alpha = 150^\circ \Rightarrow BC$ – najdłuższy bok (sprzeczne z poleceniem)

zatem $\alpha = 30^\circ$

z tw. cosinusów

$17^2 = 30^2 + x^2 - 2 \cdot 30 \cdot x \cdot \cos 30^\circ$

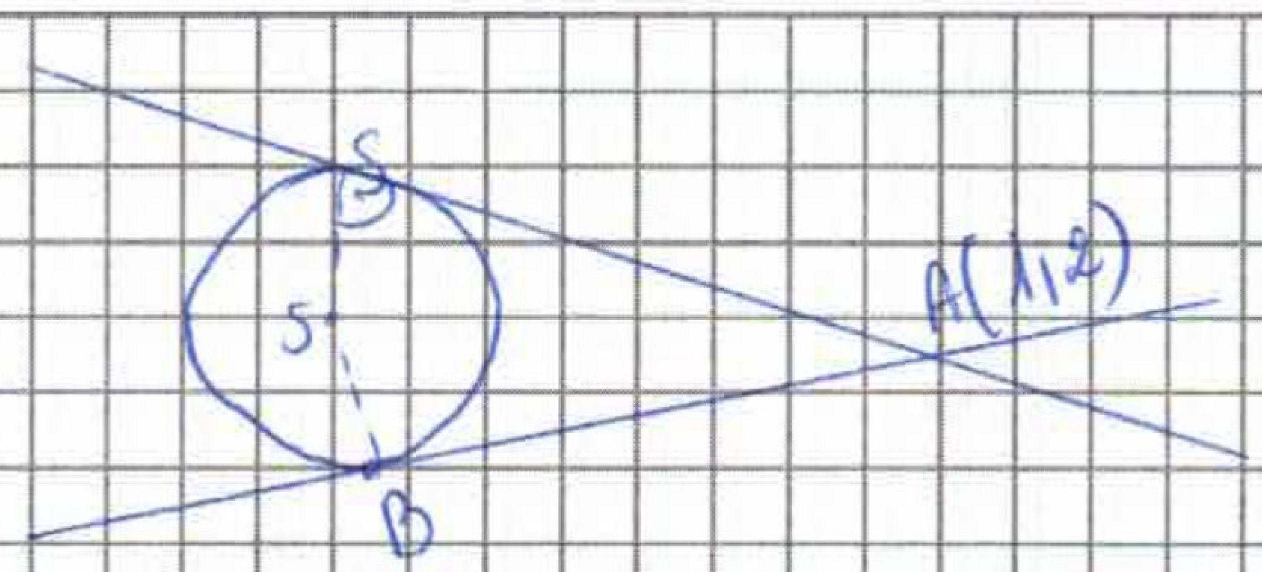
$289 = 900 + x^2 - 60x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 - 30\sqrt{3}x + 611 = 0$

Zadanie 14. (0–5)

Środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C. Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15.

Oblicz współrzędne punktu S. Rozważ wszystkie przypadki.



$S(x, y)$

$y = x + 1$

$S(x, x+1)$

$|BA| = |CA|$

$P_{ABCD} = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta ACS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot |AC| + \frac{1}{2}\sqrt{5}|AB| =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot |AB| = \sqrt{5}|AB|$

$\sqrt{5}|AB| = 15$

$|AB| = 3\sqrt{5}$

z tw. Pitagorasa

$|AS| = \sqrt{\sqrt{5}^2 + (3\sqrt{5})^2} = \sqrt{5 + 45} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|AS| = \sqrt{(1-x)^2 + [2-(x+1)]^2} = \sqrt{50}$

$1 - 2x + x^2 + (1-x)^2 = 50$

$1 - 2x + x^2 + 1 - 2x + x^2 = 50 \quad / -50$

$2x^2 - 4x - 48 = 0$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$(x-6)(x+4)=0$

$x=6 \quad \vee \quad x=-4$

$y=x+1 \quad \vee \quad y=x+1$

$y=7 \qquad\qquad y=-3$

$S=(6,7) \quad \vee \quad S(-4,-3)$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (3m+1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2 \cdot (x_1+x_2-3) \leq 3m-7$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$

$= (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2\right] =$

$= (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

$x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1+x_2-3) \leq 3m-7$

$* \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right] + 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a} - 3\right) \leq 3m-7$

zał.

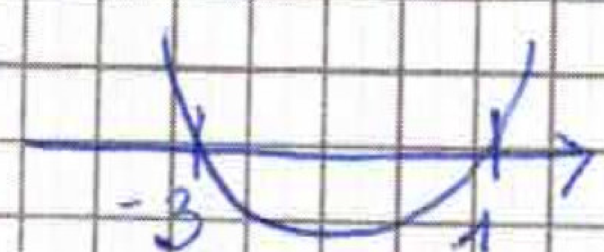
I $\Delta > 0$ II $*$

$\Delta = 9m^2 + 6m + 1 - 8m^2 - 4m - 4 = m^2 + 2m - 3 > 0$

$m^2 + 2m - 3 > 0$

$(m+3)(m-1) > 0$

$m = -3 \quad m = 1$



$m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

$* (3m+1)\left[(3m+1)^2 - 3 \cdot (2m^2+m+1)\right] + 3(2m^2+m+1)$

$3m+1-3 < 3m < 7$

$(3m+1)\left[9m^2 + 6m + 1 - 6m^2 - 3m - 3\right] + (6m^2+3m+1)(3m-2) < 3m-7$

$(3m+1)(3m^2 - 3m - 2) + 18m^3 - 12m^2 + 9m^2 - 6m + 3m - 2 < 3m-7$

$9m^3 - 9m^2 - 6m + 3m^2 - 3m - 2 + 18m^3 - 3m^2 - 3m -$

$-2 < 3m - 7$

$27m^3 - 9m^2 - 12m - 4 < 3m - 7 \quad / -3m + 7$

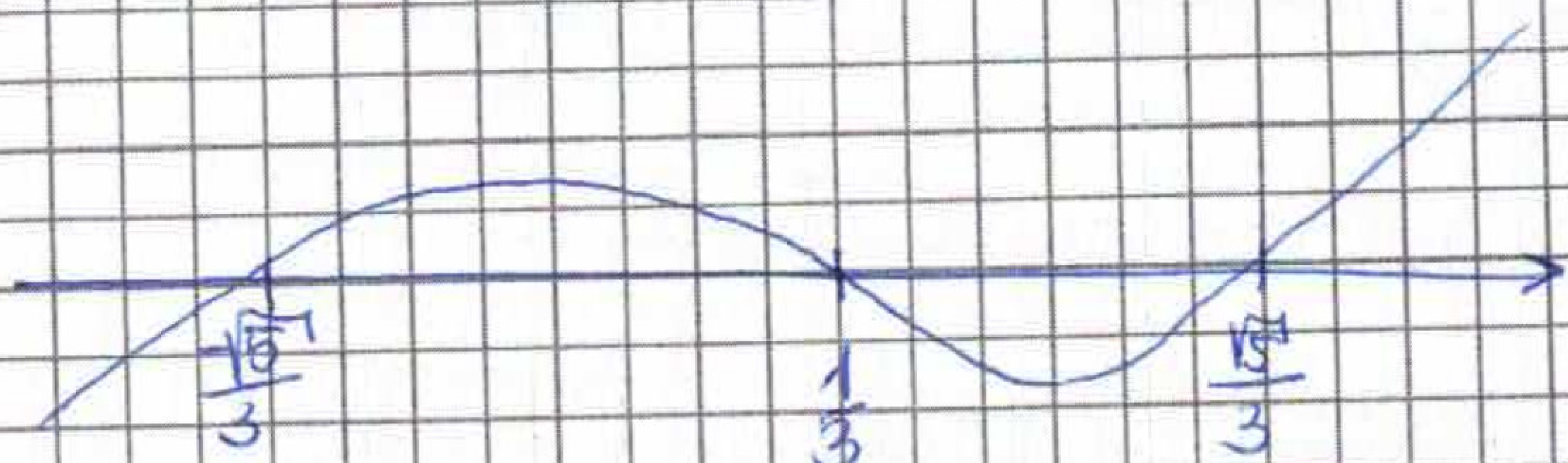
$27m^3 - 9m^2 - 15m + 5 < 0$

$9m^2(3m - 1) - 5(3m + 1) < 0$

$(3m - 1)(9m^2 - 5) < 0$

$(3m - 1)(3m - \sqrt{5})(3m + \sqrt{5}) < 0$

$m = \frac{1}{3} \qquad m = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad m = -\frac{\sqrt{5}}{3}$



$m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$2I \quad m \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

Odp. $m \in (-\infty, -3)$

Zadanie 16. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

a) Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

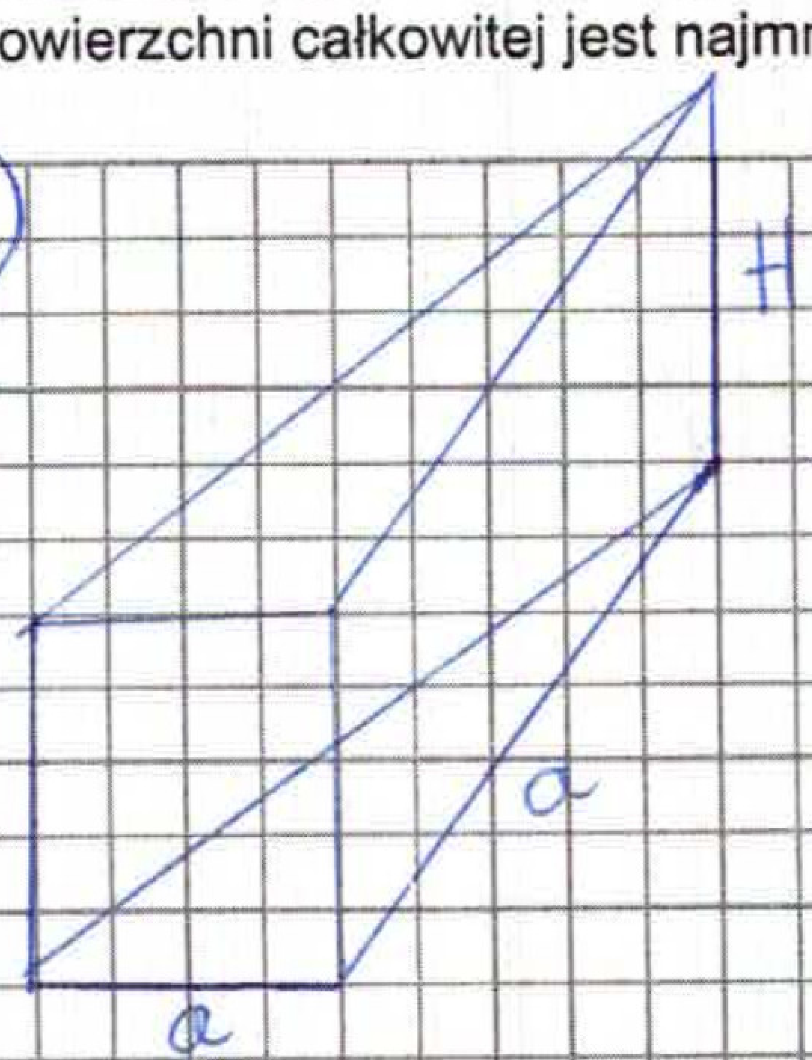
b) Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3})$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

a)



$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 3456 \quad / \cdot 4$

$a^2\sqrt{3} \cdot H = 13824$

$H = \frac{13824}{a^2\sqrt{3}} = \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$

$0 < a \le 8\sqrt{3}$

$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot a \cdot \frac{4608\sqrt{3}}{a^2} =$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$

b) $P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a} = \underbrace{\frac{a^3\sqrt{3}+27684\sqrt{3}}{2a}}_{f(a)}$

$D_f = (0, 8\sqrt{3}\rangle$

$f'(a) = \frac{3\sqrt{3}a^2 \cdot 2a - (a^3\sqrt{3}+27684\sqrt{3})\cdot 2}{4a^2} =$

$= \frac{6\sqrt{3}a^3 - 2\sqrt{3}a^3 - 55296\sqrt{3}}{4a^2} = \frac{4\sqrt{3}a^3 - 55296\sqrt{3}}{4a^2}$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}a^3 + 55296\sqrt{3} = 0$

$a^3 = \frac{55296\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 13824$

$a = \sqrt[3]{13824} = 24$

$f(a)\downarrow$ dla $a \in (-\infty, -24)$ to znaczy, że mniejsze pole jest dla $a = 8\sqrt{3}$

$P(8\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}\cdot \cancel{64}^{32}\cdot 3}{\cancel{2}_1} + \frac{13824\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}$

$= 96\sqrt{3} + 4728$