

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Symbol arkusza

EMAP-P0-**100**-2405

DATA: **8 maja 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**,
tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi.
Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu
takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



W każdym z zadań od 1. do 29. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Na początku sezonu letniego cenę x pary sandałów podwyższono o 20%. Po miesiącu nową cenę obniżono o 10%. Po obu tych zmianach ta para sandałów kosztowała 81 zł. Początkowa cena x pary sandałów była równa

- A. 45 zł B. 73,63 zł **C. 75 zł** D. 87,48 zł

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\left(\frac{1}{16}\right)^8 \cdot 8^{16}$ jest równa

- A. 2^{24} **B. 2^{16}** C. 2^{12} D. 2^8

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\log_{\sqrt{3}} 9$ jest równa

- A. 2 B. 3 **C. 4** D. 9

Zadanie 4. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b wartość wyrażenia $(2a + b)^2 - (2a - b)^2$ jest równa wartości wyrażenia

- A. $8a^2$ **B. $8ab$** C. $-8ab$ D. $2b^2$

Zadanie 5. (0–1)

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$1 - \frac{3}{2}x < \frac{2}{3} - x$$

jest przedział

- A. $(-\infty, -\frac{2}{3})$** B. $(-\infty, \frac{2}{3})$ C. $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ D. $(\frac{2}{3}, +\infty)$

Zadanie 6. (0–1)

Największą liczbą będącą rozwiązaniem rzeczywistym równania $x(x+2)(x^2+9)=0$ jest

- A. (-2) **B. 0** C. 2 D. 3

Zadanie 7. (0–1)

Równanie $\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. nie ma rozwiązania.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: (-1) .
 C. ma dokładnie dwa rozwiązania: (-2) oraz 3.
 D. ma dokładnie trzy rozwiązania: (-1) , (-2) oraz 3.

Zadanie 8. (0–1)

W październiku 2022 roku założono dwa sady, w których posadzono łącznie 1960 drzew. Po roku stwierdzono, że uschło 5% drzew w pierwszym sadzie i 10% drzew w drugim sadzie. Uschnięte drzewa usunięto, a nowych nie dosadzano.

Liczba drzew, które pozostały w drugim sadzie, stanowiła 60% liczby drzew, które pozostały w pierwszym sadzie.

Niech x oraz y oznaczają liczby drzew posadzonych – odpowiednio – w pierwszym i drugim sadzie.

Układem równań, którego poprawne rozwiązanie prowadzi do obliczenia liczby x drzew posadzonych w pierwszym sadzie oraz liczby y drzew posadzonych w drugim sadzie, jest

- A. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,6 \cdot 0,95x=0,9y \end{cases}$**
 B. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,95x=0,6 \cdot 0,9y \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,05x=0,6 \cdot 0,1y \end{cases}$
 D. $\begin{cases} x+y=1960 \\ 0,4 \cdot 0,95x=0,9y \end{cases}$

Zadanie 9. (0-1)

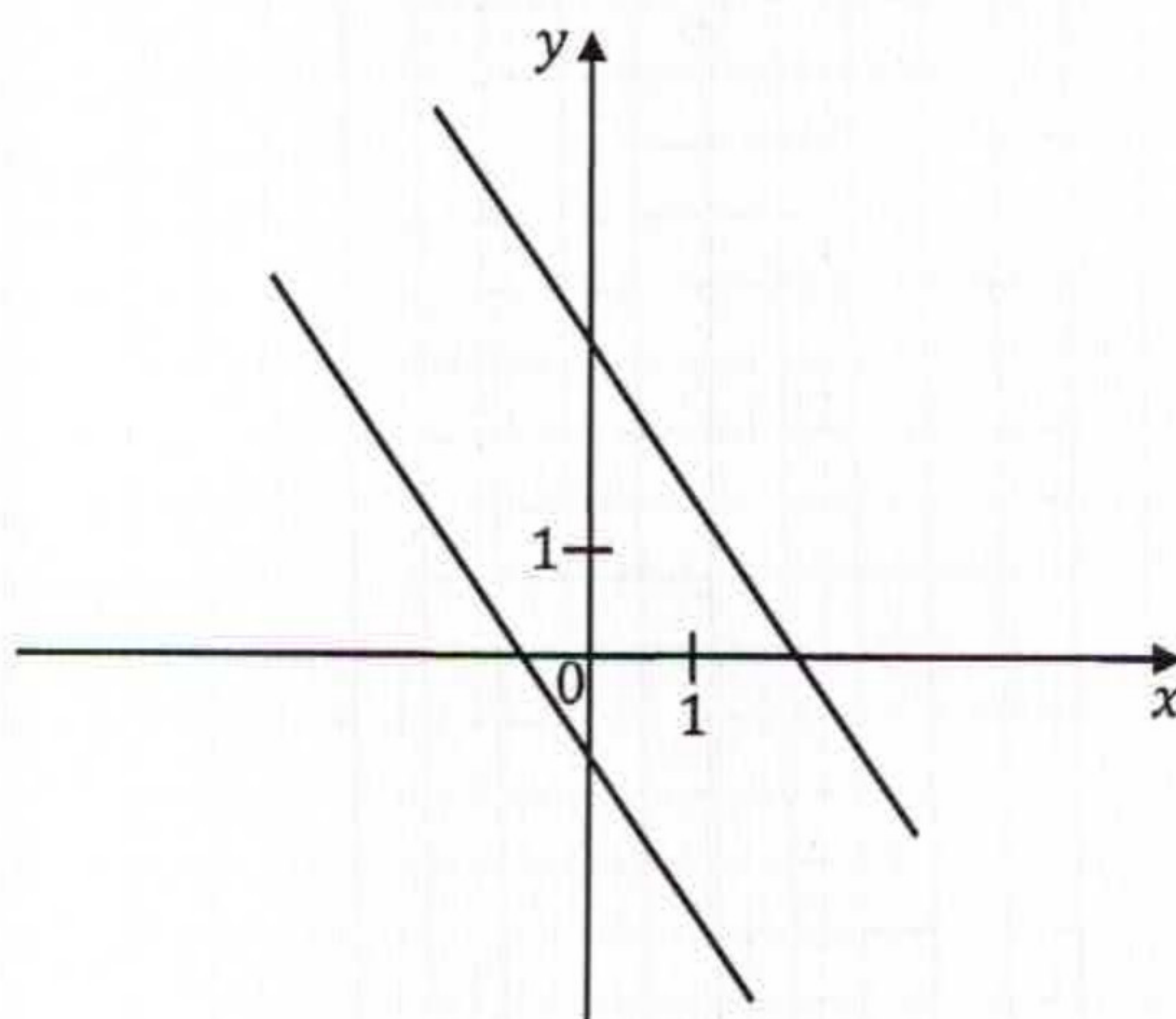
Średnia arytmetyczna trzech liczb: a , b , c , jest równa 9.

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: a , a , b , b , c , c , jest równa

- ☒ A. 9 B. 6 C. 4,5 D. 18

Zadanie 10. (0-1)

Na rysunku przedstawiono dwie proste równoległe, które są interpretacją geometryczną jednego z poniższych układów równań A-D.

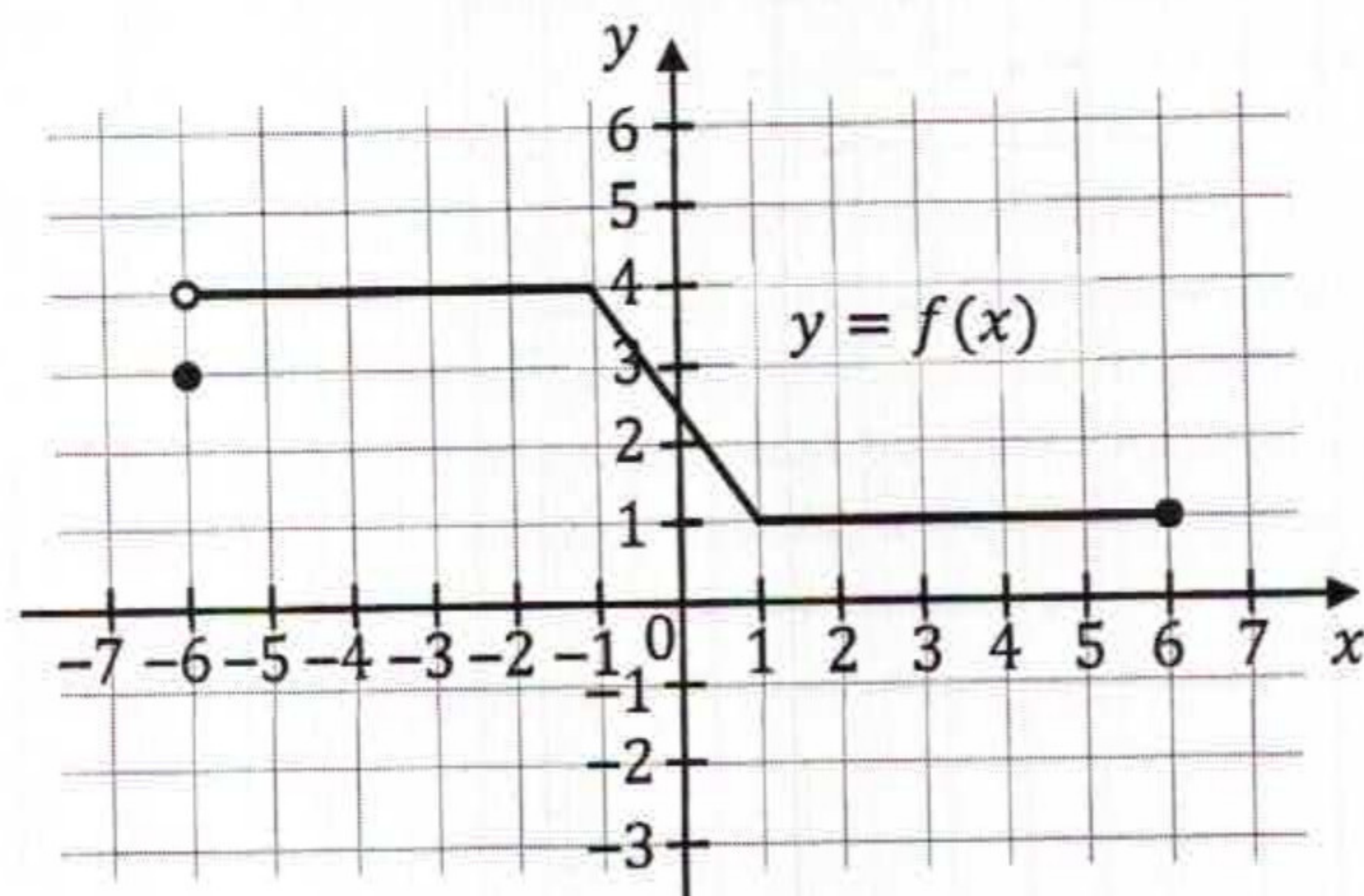


Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, jest

- A. $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = -\frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$
- ☒ C. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 3 \\ y = \frac{3}{2}x - 1 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

Zadanie 11. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Zbiorem wartości tej funkcji jest

- A. $(-6, 6)$ B. $\langle 1, 4 \rangle$ **C. $\langle 1, 4 \rangle$** D. $\langle -6, 6 \rangle$

Zadanie 12. (0–1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = (-2k + 3)x + k - 1$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.

Funkcja f jest malejąca dla każdej liczby k należącej do przedziału

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -\frac{3}{2})$ C. $(1, +\infty)$ **D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$**

Zadanie 13. (0–1)

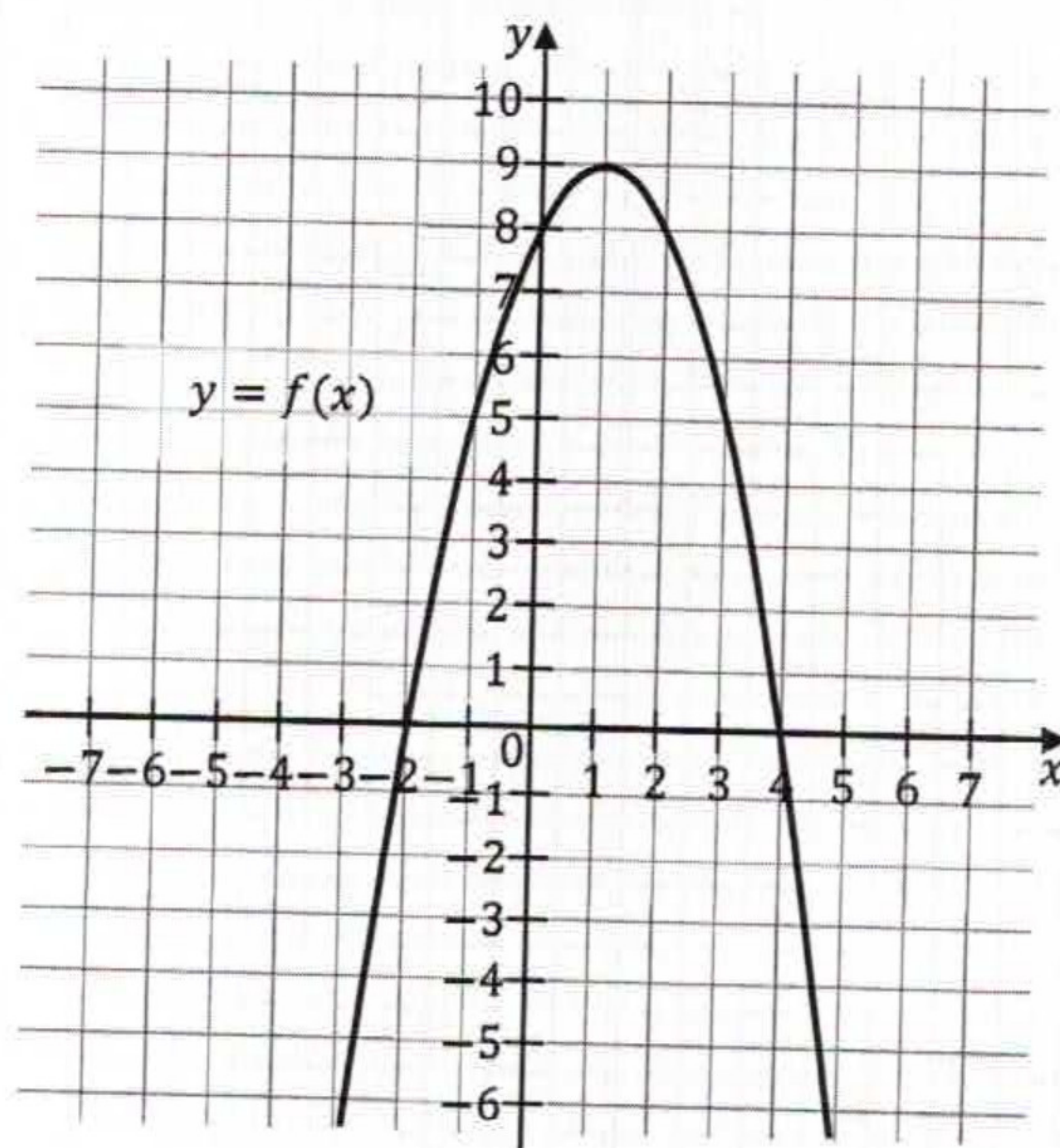
Funkcje liniowe f oraz g , określone wzorami $f(x) = 3x + 6$ oraz $g(x) = ax + 7$, mają to samo miejsce zerowe.

Współczynnik a we wzorze funkcji g jest równy

- A. $(-\frac{7}{2})$ B. $(-\frac{2}{7})$ C. $\frac{2}{7}$ **D. $\frac{7}{2}$**

Informacja do zadań 14.–15.

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f (zobacz rysunek). Wierzchołek tej paraboli oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają obie współrzędne całkowite.



Zadanie 14. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem

A. $f(x) = -(x + 1)^2 - 9$

B. $f(x) = -(x - 1)^2 + 9$

C. $f(x) = -(x - 1)^2 - 9$

☒ D. $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$

Zadanie 15. (0–1)

Dla funkcji f prawdziwa jest równość

☒ A. $f(-4) = f(6)$

B. $f(-4) = f(4)$

C. $f(-4) = f(5)$

D. $f(-4) = f(7)$

Zadanie 16. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, dane są wyrazy $a_4 = -2$ oraz $a_6 = 16$.

Piąty wyraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ **C. 7** D. 9

Zadanie 17. (0–1)

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^{n-1}$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{1}{2}$ B. (-2) **C. 2** D. 1

Zadanie 18. (0–1)

Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = (n+2)(7-n)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów ciągu (b_n) jest równa

- A. 6** B. 7 C. 8 D. 9

Zadanie 19. (0–1)

Liczba $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \cdot \sin 20^\circ$ jest równa

- A. $\cos 20^\circ$ **B. $\sin 20^\circ$**
C. $\operatorname{tg} 20^\circ$ D. $\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ$

Zadanie 20. (0–1)

Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

- A. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{13}$ **B. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$** C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{13}{12}$

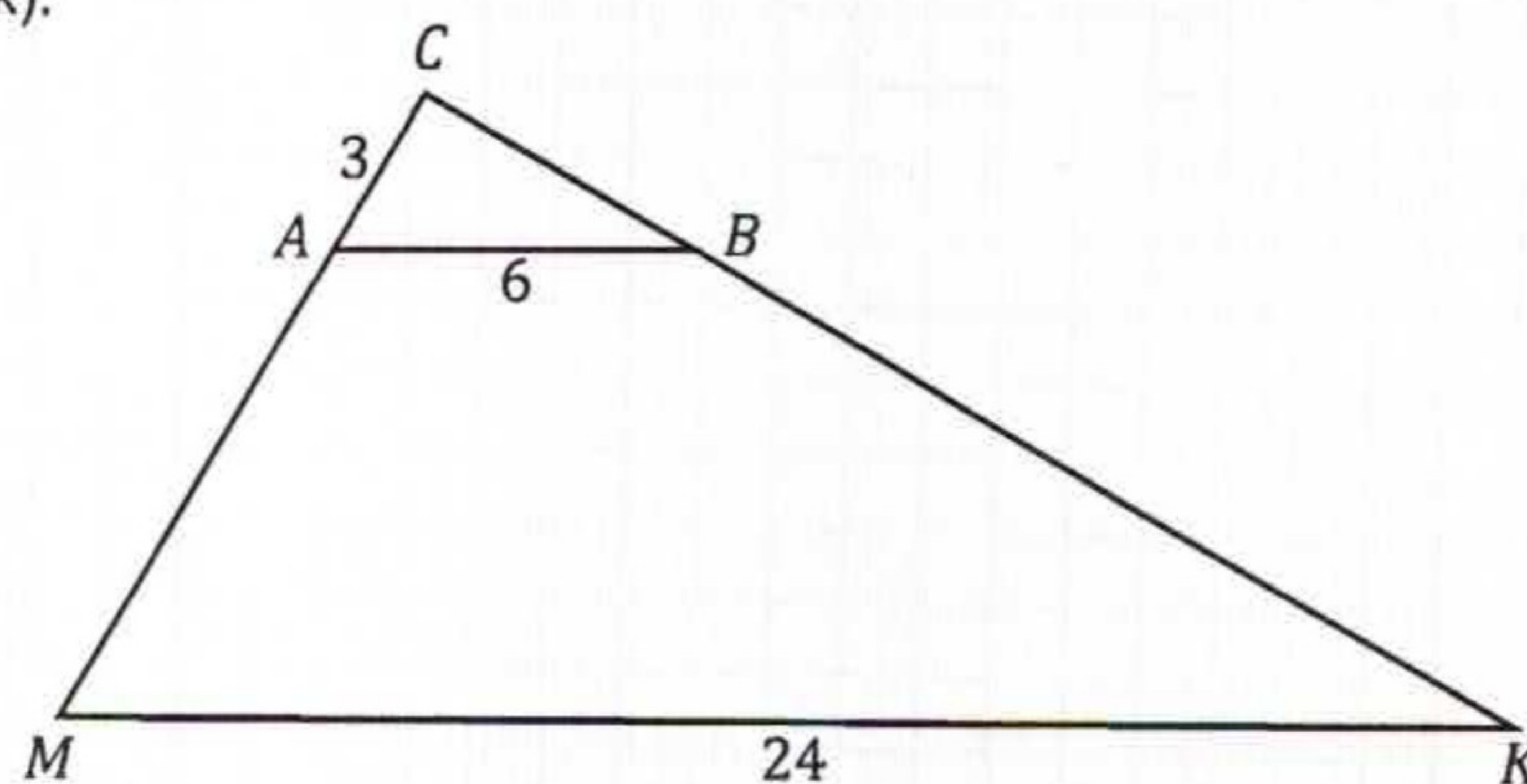
Zadanie 21. (0–1)

Dany jest równoległobok o bokach długości 3 i 4 oraz o kącie między nimi o mierze 120° . Pole tego równoległoboku jest równe

- A. 6 **B. $6\sqrt{3}$** C. 12 D. $12\sqrt{3}$

Zadanie 22. (0–1)

W trójkącie MKC bok MK ma długość 24. Prosta równoległa do boku MK przecina boki MC i KC – odpowiednio – w punktach A oraz B takich, że $|AB| = 6$ i $|AC| = 3$ (zobacz rysunek).

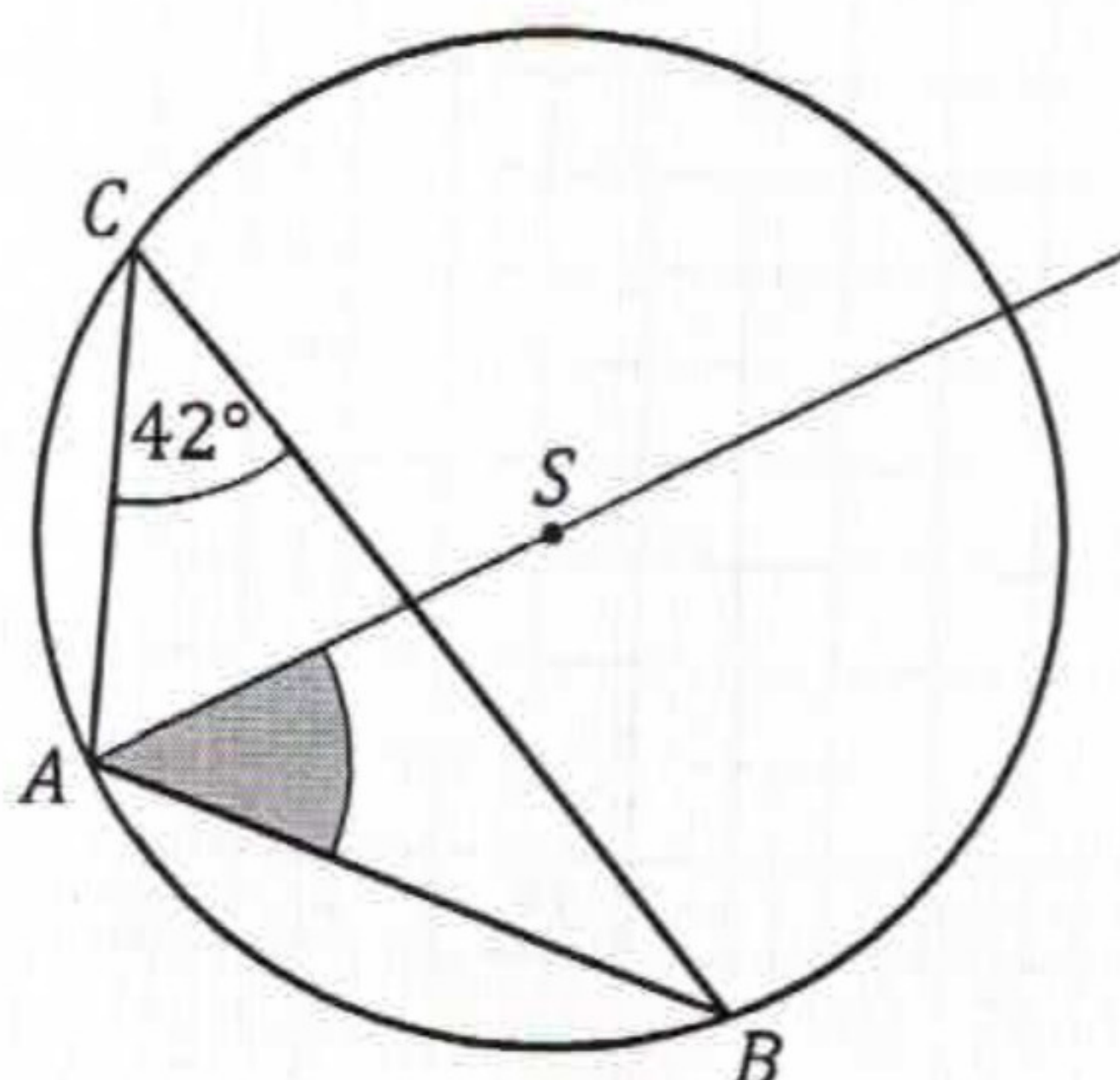


Długość odcinka MA jest równa

- A. 18 B. 15 **C. 9** D. 12

Zadanie 23. (0–1)

W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku w punkcie S , kąt ACB ma miarę 42° (zobacz rysunek).



Miara kąta ostrego BAS jest równa

- A. 42° B. 45° **C. 48°** D. 69°

Zadanie 24. (0–1)

Proste k oraz l są określone równaniami

$$k: y = (m + 1)x + 7$$

$$l: y = -2x + 7$$

Proste k oraz l są prostopadłe, gdy liczba m jest równa

- ☒ A. $(-\frac{1}{2})$ B. $\frac{1}{2}$ C. (-3) D. 1

Zadanie 25. (0–1)

Na prostej l o współczynniku kierunkowym $\frac{1}{2}$ leżą punkty $A = (2, -4)$ oraz $B = (0, b)$.

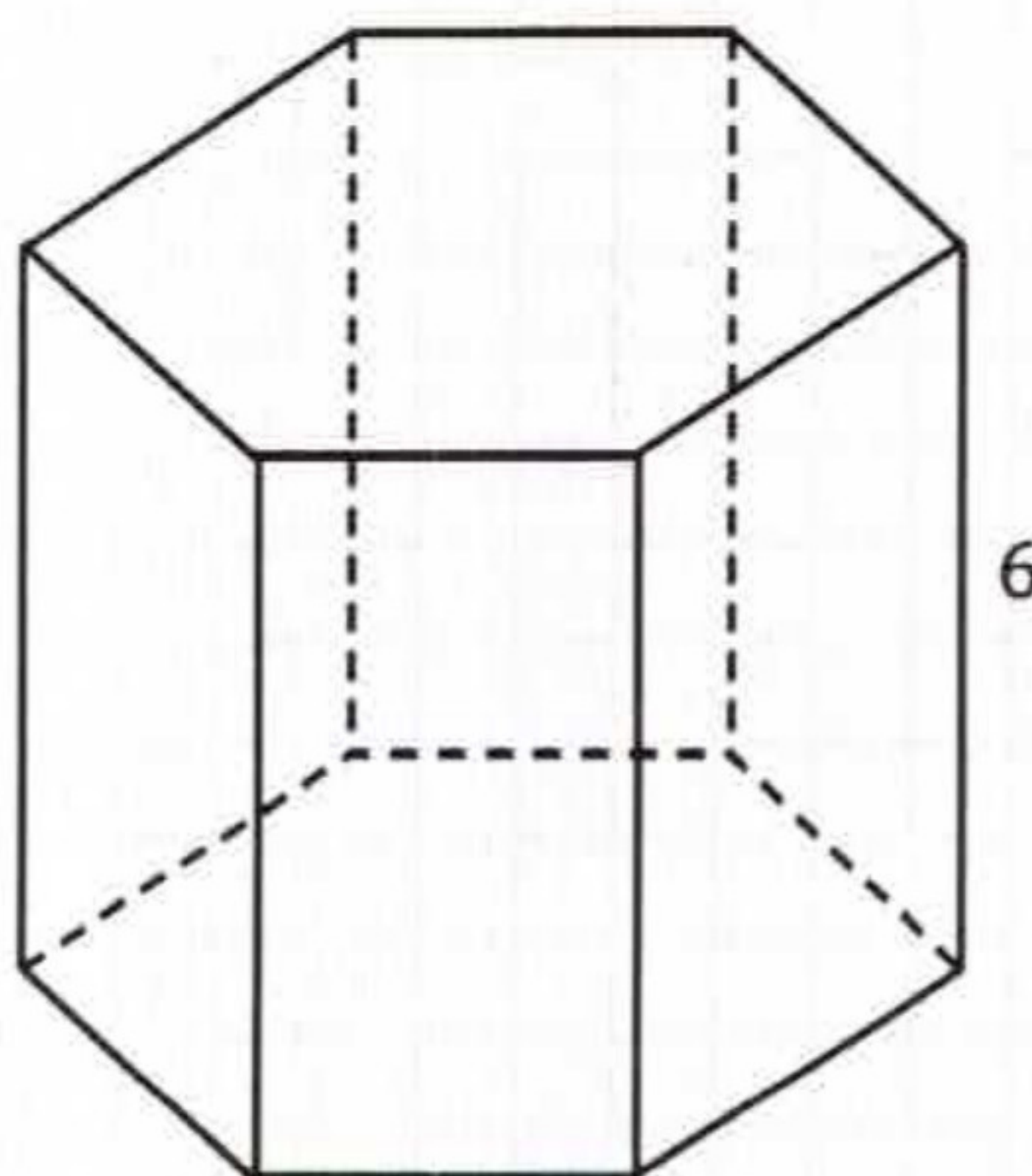
Wtedy liczba b jest równa

- ☒ A. (-5) B. 10 C. (-2) D. 0

Zadanie 26. (0–1)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 6 (zobacz rysunek).

Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe $15\sqrt{3}$.



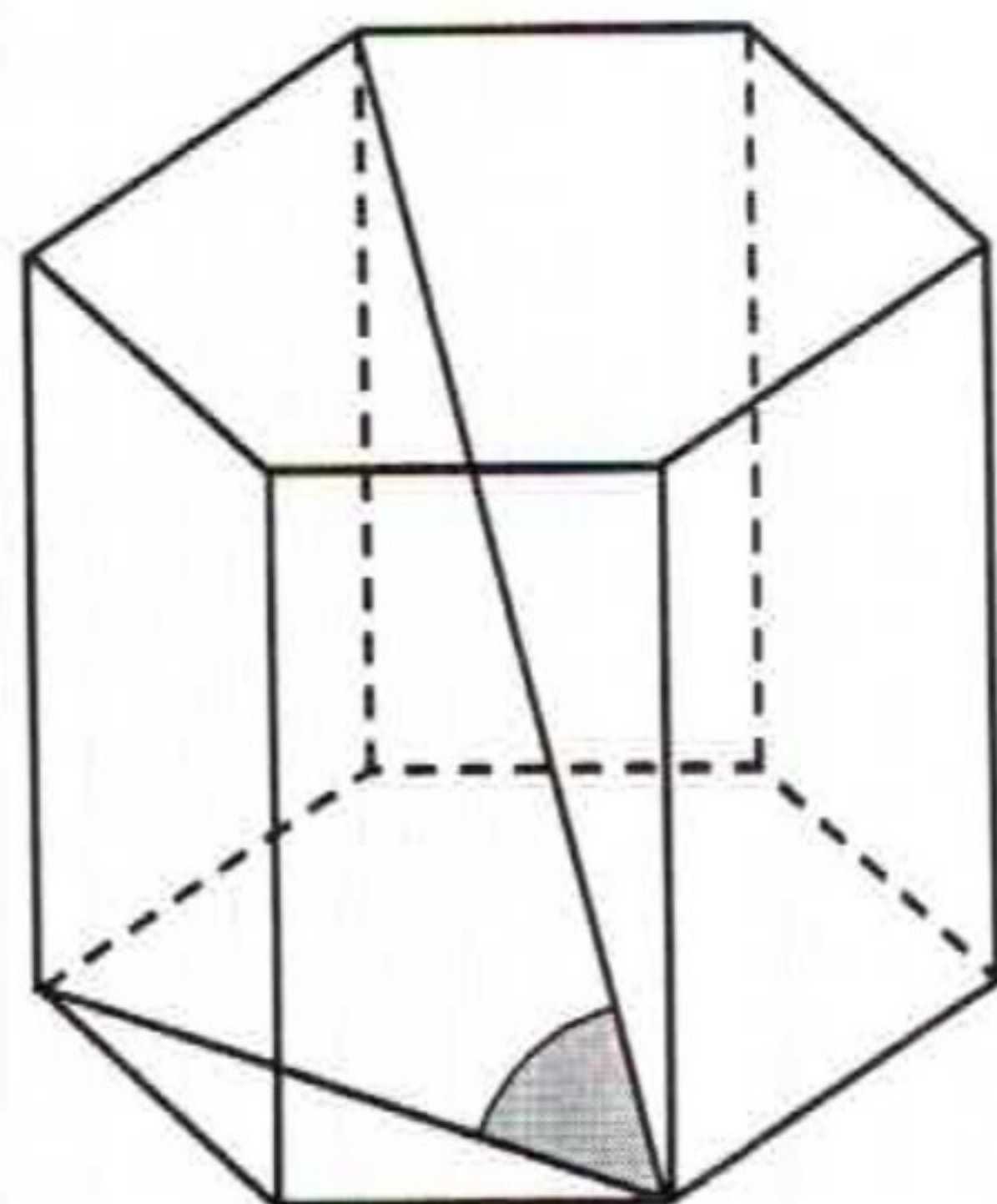
Pole jednej ściany bocznej tego graniastosłupa jest równe

- A. $36\sqrt{10}$ B. 60 ☒ C. $6\sqrt{10}$ D. 360

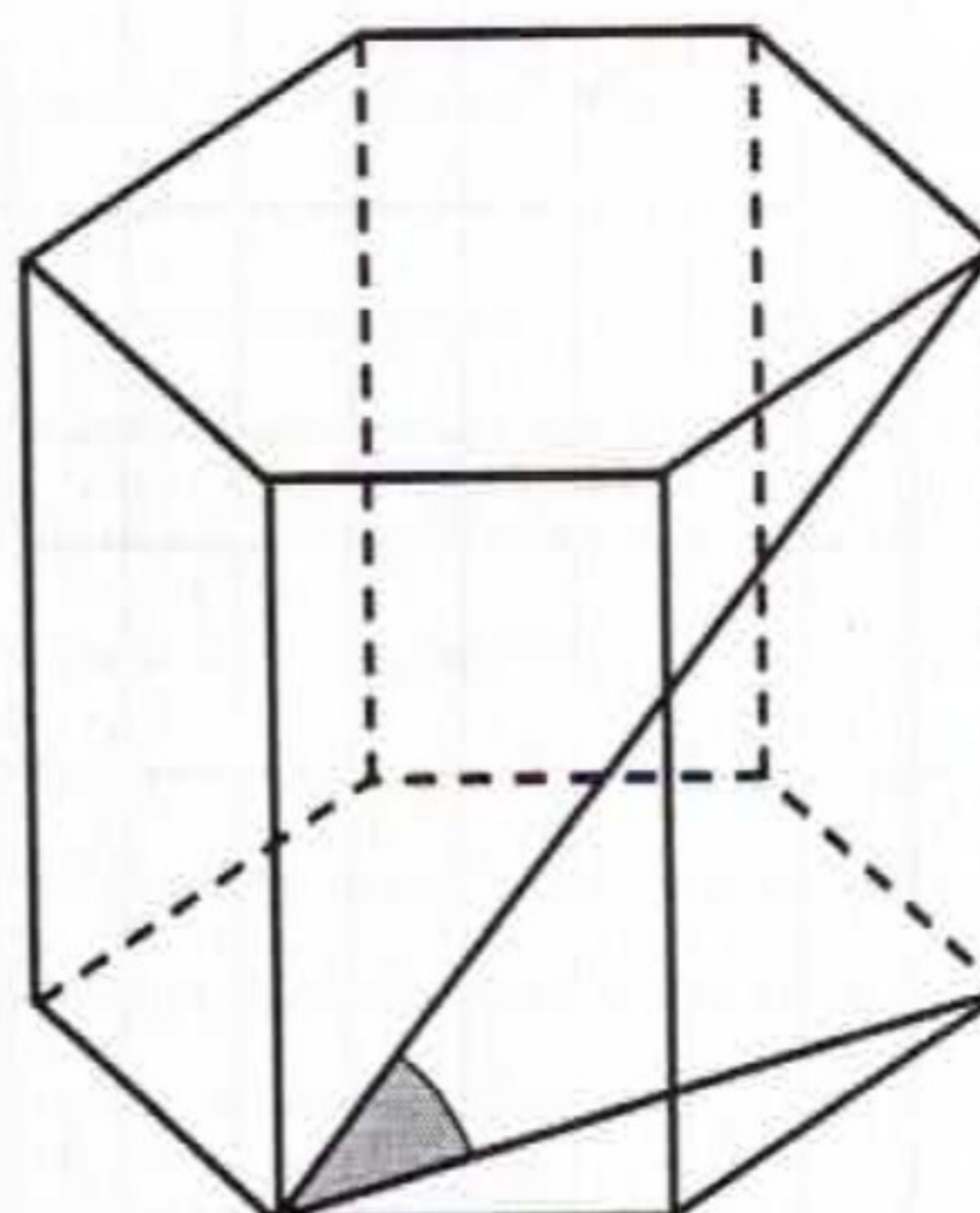
Zadanie 27. (0–1)

Kąt nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy jest zaznaczony na rysunku

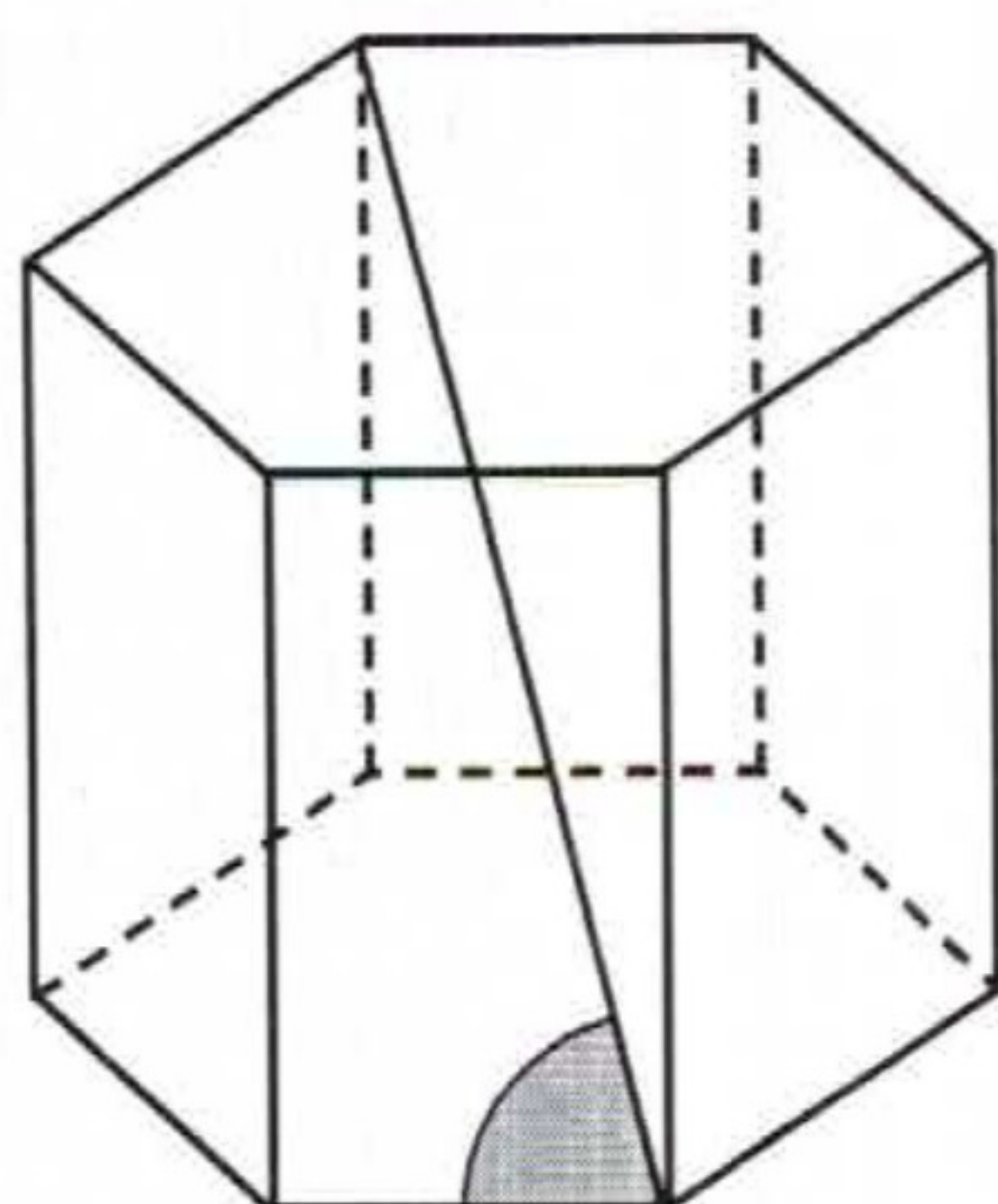
A.



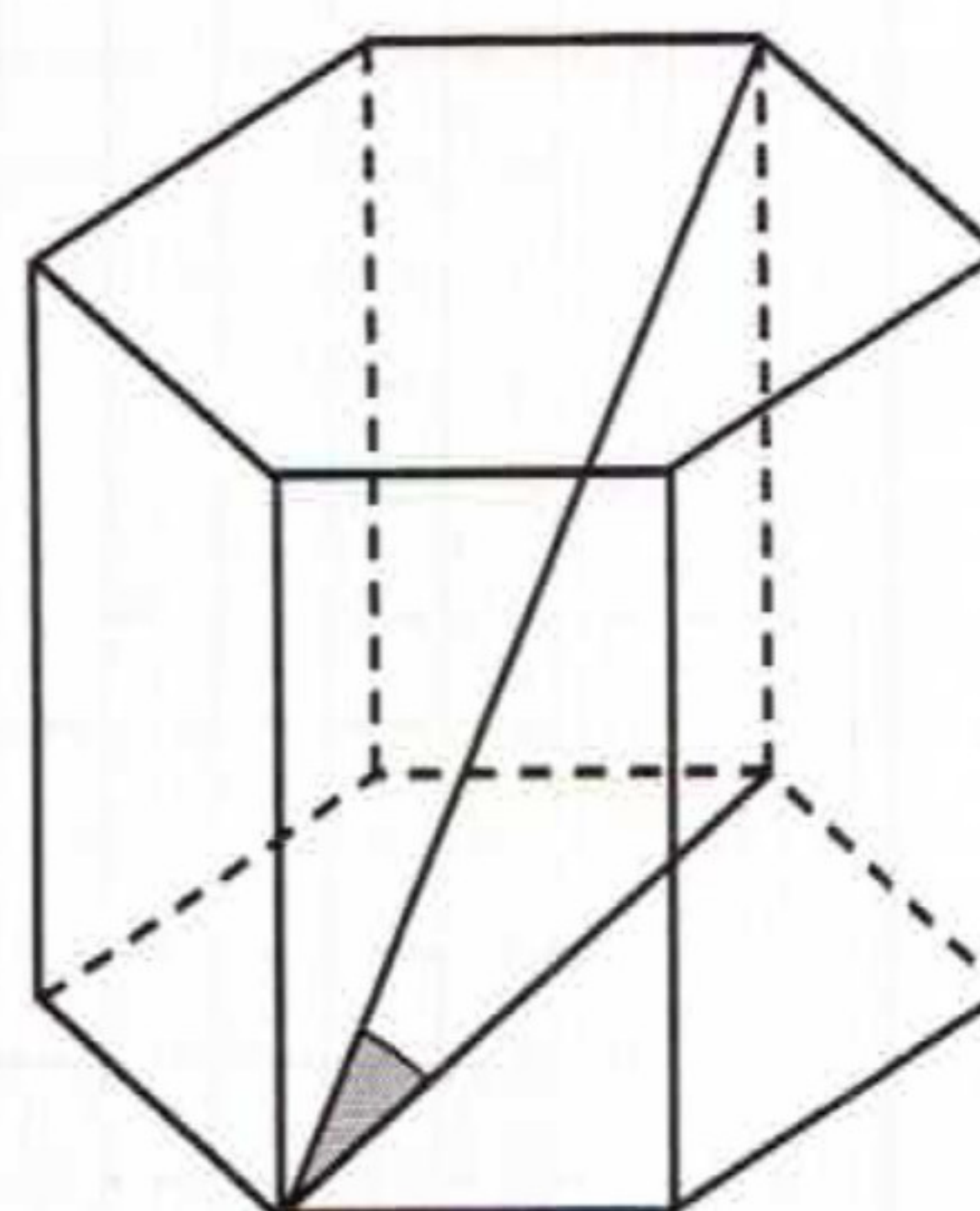
B.



C.



D.



Zadanie 28. (0–1)

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 64. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 12.

Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

Zadanie 29. (0–1)

Rozważamy wszystkie kody czterocyfrowe utworzone tylko z cyfr 1, 3, 6, 8, przy czym w każdym kodzie każda z tych cyfr występuje dokładnie jeden raz.

Liczba wszystkich takich kodów jest równa

A. 4

B. 10

C. 24

D. 16

Zadanie 30. (0-2)

Rozwiąż nierówność

$$x^2 - 4 \leq 3x$$

$$x^2 - 4 \leq 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$

$$\Delta = 9 + 16$$

$$\Delta = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x \in \langle -1; 4 \rangle$$

Zadanie 31. (0-2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, prawdziwa jest nierówność

$$(3x + y)(x + 3y) > 16xy$$

$$3x^2 + 9xy + xy + 3y^2 - 16xy > 0$$

$$3x^2 - 6xy + 3y^2 > 0$$

$$3(x-y)^2 > 0$$

ponieważ $x \neq y$ liczba $(x-y)^2 > 0$

$$\text{zatem } 3(x-y)^2 > 0$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. (0-2)

Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ jest prosta o równaniu $x = -2$. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1. Oblicz współczynniki b oraz c .

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$x = -2 \rightarrow \text{oś symetrii wykresu}$$

$$\text{zatem } p = -2$$

$$x_1 = 1$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p$$

$$\frac{-1 + x_2}{2} = -2 \quad | \cdot 2$$

$$-1 + x_2 = -4$$

$$x_2 = -4 + 1$$

$$x_2 = -3$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow \text{postać iloczynowa}$$

$$a = 1$$

$$f(x) = 1(x - 1)(x - (-3)) = (x - 1)(x + 3) =$$

$$x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$b = 2$$

$$c = -3$$

Zadanie 33. (0-2)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy (-1) , a suma piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa (-165) .
Oblicz różnicę tego ciągu.

$$\begin{aligned} n > 1 \\ a_3 &= -1 \\ S_{15} &= -165 \\ r &= ? \end{aligned}$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$S_{15} = \frac{2a_1 + 14r}{2} \cdot 15$$

$$\begin{cases} -1 = a_1 + 2r \\ -165 = \frac{2a_1 + 14r}{2} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = a_1 + 2r \\ -165 = \frac{2(a_1 + 7r)}{2} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = a_1 + 2r \\ -165 = (a_1 + 7r) \cdot 15 \quad |:15 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} -1 = a_1 + 2r \\ -11 = a_1 + 7r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10 &= -5r \quad | : (-5) \\ -2 &= r \end{aligned}$$

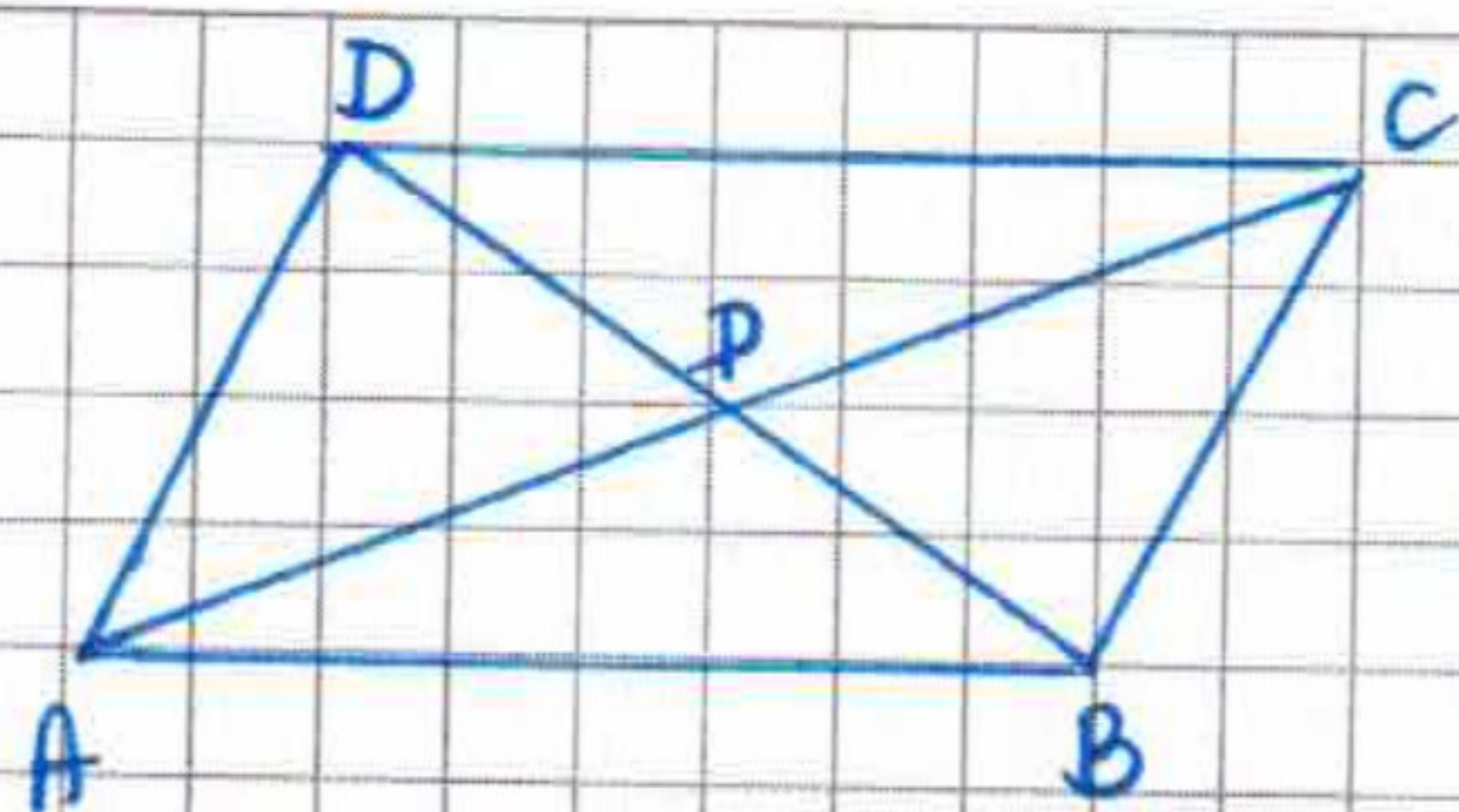
Odp. $r = -2$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.	33.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 34. (0-2)

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $A = (-2, 6)$ oraz $B = (10, 2)$. Przekątne AC oraz BD tego równoległoboku przecinają się w punkcie $P = (6, 7)$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku.



$$A = (-2, 6)$$

$$B = (10, 2)$$

$$P = (6, 7)$$

$$|BC| = ?$$

$$6 = \frac{x_c + (-2)}{2} \quad | \cdot 2$$

$$12 = x_c - 2$$

$$14 = x_c$$

$$7 = \frac{y_c + 6}{2} \quad | \cdot 2$$

$$14 = y_c + 6$$

$$8 = y_c$$

$$C = (14, 8)$$

$$|BC| = \sqrt{(14-10)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 35. (0-2)

Dany jest pięcioelementowy zbiór $K = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Wylosowanie każdej liczby z tego zbioru jest jednakowo prawdopodobne. Ze zbioru K losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie i zapisujemy je w kolejności losowania.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą.

$$K = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$$

A - suma wylosowanych liczb jest parzysta

$$A = \{(5, 5); (5, 7); (7, 5); (5, 9); (9, 5); \\ (7, 9); (9, 7); (7, 7); (9, 9); (6, 8); \\ (8, 6); (6, 6); (8, 8)\}$$

$$P(A) = \frac{13}{25}$$

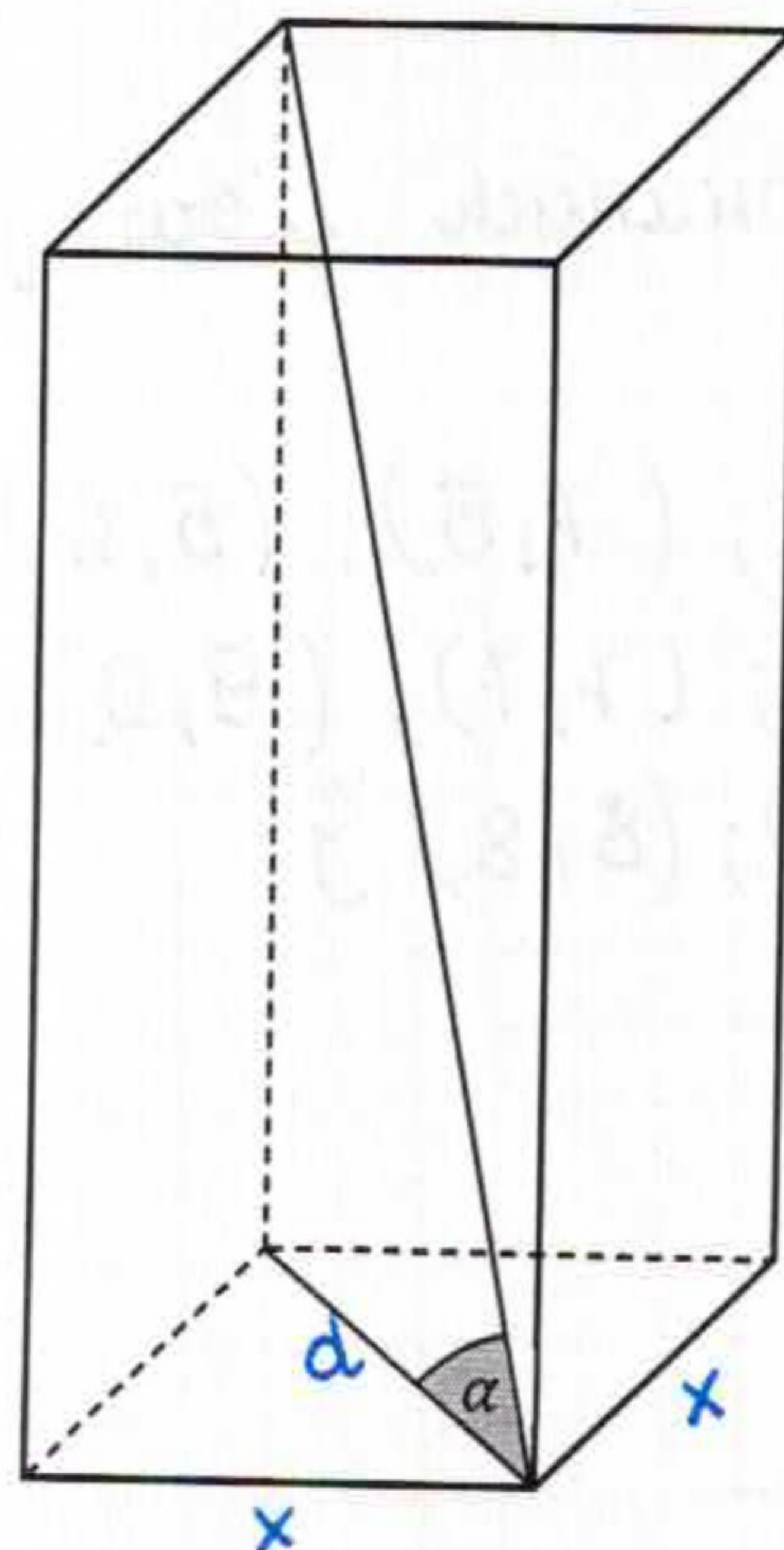
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.	35.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 36. (0-5)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o objętości równej 108 stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości graniastosłupa jest równy $\frac{1}{4}$.

Przekątna tego graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem α (zobacz rysunek).

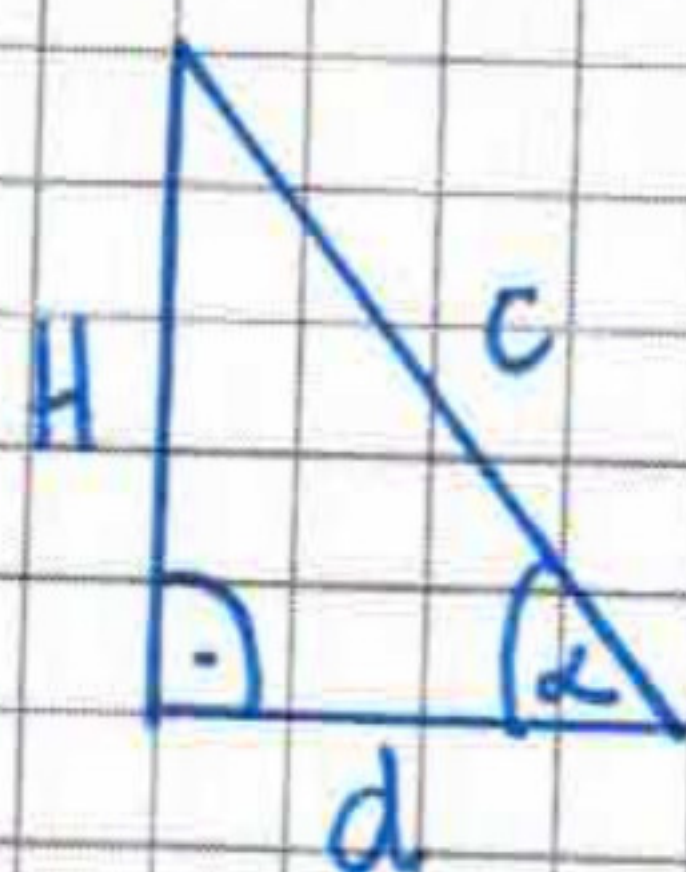
Oblicz cosinus kąta α oraz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



$$\begin{aligned}
 V &= x^2 \cdot H & \frac{x}{H} &= \frac{1}{4} \\
 V &= 108 & H &= 4x \\
 108 &= x^2 \cdot H = x^2 \cdot 4x = 4x^3 \\
 108 &= 4x^3 \quad | :4 \\
 27 &= x^3 \quad | \sqrt[3]{} \\
 x &= \sqrt[3]{27} \\
 x &= 3 \\
 H &= 4x = 4 \cdot 3 \\
 H &= 12
 \end{aligned}$$

d - przekątna podstawy

$$d = x\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



$$H = 12$$

$$d = 3\sqrt{2}$$

$$c^2 = 12^2 + (3\sqrt{2})^2 = 144 + 9 \cdot 2 = 144 + 18 = 162$$

$$c = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4 = 18 + 48 = 66$$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	36.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	